Integração Numérica

- Em determinadas situações, integrais são difíceis, ou mesmo impossíveis de se resolver analiticamente.

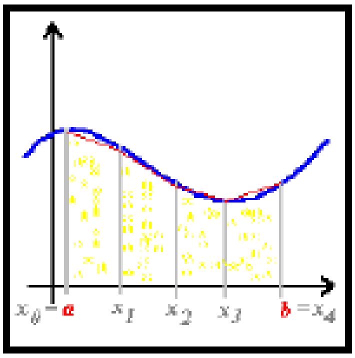
- Exemplo: o valor de f(x) é conhecido apenas em alguns pontos, num intervalo [a, b]. Como não se conhece a expressão analítica de f(x), não é possível calcular

$$\int_a^b f(x)dx$$

- Forma de obtenção de uma aproximação para a integral de f(x) num intervalo [a, b] $\Rightarrow$ Métodos Numéricos.

Regra dos Trapézios

- Intervalo [a, b] de grande amplitude.
- Soma da área de ***n*** trapézios, cada qual definido pelo seu sub-intervalo.



- **Fórmula:**

$$\int_{x_0}^{x_N} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)]+\frac{h}{2}[f(x_1)+f(x_2)] + \ldots + \frac{h}{2}[f(x_{N-1})+f(x_N)]$$

- Só os termos ***f(x0)*** e ***f(xn)*** não se repetem, assim, esta fórmula pode ser simplificada em:

[Digite texto]

$$\int_{x_0}^{x_N} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\{f(x_0)+2[f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{N-1})]+f(x_N)\}$$

Exemplo: Estimar o valor de $\int_0^4 (1+x^2)^{-1/2} dx$

- **Regra dos Trapézios - 2 pontos** (x_0=0.0 e x_1=4.0)
  I=(h/2).(y_0+y_1)=2x(1.00000+0.24254) **= 2.48508**
- **Regra dos Trapézios - 3 pontos** (x_0=0.0,x_1 =2.0,x_2 =4.0)
  I=(h/2).(y_0+2y_1+y_2)=1x(1.00000+2x0.44722+ 0.24254) **= 2.1369**
- **Regra dos Trapézios 9 pontos**
  I=(h/2).(y_0+2y_1+2y_2+2y_3+2y_4+2y_5+2y_6+2y_7+y_8) =**2.0936**

x	$y=(1+x^2)^{-1/2}$
0.0	1.00000
0.5	0.89445
1.0	0.70711
1.5	0.55475
2.0	0.44722
2.5	0.37138
3.0	0.31623
3.5	0.27473
4.0	0.24254

Fórmula de Simpson

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

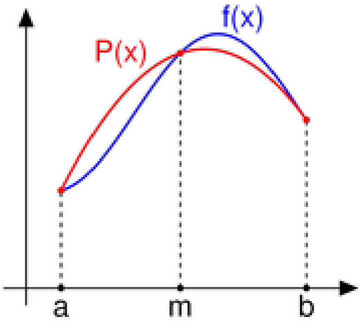
Em Cálculo Numérico, a **Fórmula de Simpson** (em nome de Thomas Simpson, um matemático inglês) é uma forma de se obter uma aproximação da integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Expressão da Fórmula de Simpson

A Fórmula de Simpson faz uma aproximação de *f*(*x*) pelo polinômio quadrático *P*(*x*) que admite o mesmo valor de *f*(*x*) em *a*, *b*, e no ponto central $m = \frac{a+b}{2}$. Pode-se utilizar interpolação por polinômios de Lagrange para encontrar uma expressão para essa função polinomial.

$$P(x) = f(a)\frac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)} + f(m)\frac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)}$$



A função $f(x)$ é aproximada pela função quadrática $P(x)$ (em vermelho).

Segue, através de um cálculo simples, que:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

O erro na aproximação da integral por meio da fórmula de Simpson é dado pela seguinte expressão:

$$-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi),$$

Com $h = (b - a) / 2$ e ξ um número entre a e b.

Fórmula de Simpson

Vemos que a fórmula de Simpson fornece uma boa aproximação se o intervalo de integração $[a,b]$ for pequeno, o que não acontece na maior parte do tempo. A solução óbvia é dividir o intervalo de integração em intervalos menores, aplicar a fórmula de Simpson para cada um destes e somar os resultados. Deste modo obtemos a fórmula de Simpson:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2j-1}) + f(x_n)\right],$$

onde n é o número de partes em que o intervalo $[a,b]$ foi dividido com n par, $h = (b - a) / n$ igual ao comprimento de cada sub-intervalo e $x_i = a + ih$ para $i = 0,1,...,n - 1,n$, em particular, $x_0 = a$ e $x_n = b$. Alternativamente, pode-se reescrever a expressão da seguinte forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].$$

O erro máximo associado à fórmula de Simpson pode ser calculado através de:

$$-\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\xi),$$

Onde h é o comprimento do "passo", dado por $h = (b - a) / n$.

Exemplo: Estimar o valor de $\int_0^4 (1+x^2)^{-1/2}\,dx$

- **Regra de Simpson – (2 subintervalos = 3 pontos)** (x_0=0.0,x_1 =2.0,x_2 =4.0)
  I=(h/3).(y_0+4y_1+y_2)=(2/3).(1.00000+4x0.44722+ 0.24254) **= 2.021**

- **Regra de Simpson – (8 subintervalos = 9 pontos)**
  I=(h/3).(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+4y_5+2y_6+4y_7+y_8) = **2.094**

$$\frac{0.5}{3}\cdot(1.0+4\cdot0.89445+2\cdot0.70711+4\cdot0.55475+2\cdot0.44722+4\cdot0.37138+2\cdot0.31623+4\cdot0.27473+0.24254) = 2.094$$

x	$y=(1+x^2)^{-1/2}$
0.0	1.00000
0.5	0.89445
1.0	0.70711
1.5	0.55475
2.0	0.44722
2.5	0.37138
3.0	0.31623
3.5	0.27473
4.0	0.24254

- **Regra de Simpson – (4 subintervalos = 5 pontos)** (x_0=0.0,x_1 =1.0,x_2 =2.0, x_3 =3.0,x_4 =4.0)
  I=(h/3).(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4) = **2.077**

$$\frac{1}{3}\cdot(1.0+4\cdot0.70711+2\cdot0.44722+4\cdot0.31623+0.24254) = 2.077$$