Erros de truncamento na interpolação por polinômios

Seja $f(x)$ uma função contínua e n vezes diferenciável no intervalo (a,b) que contém os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e seja $p(x)$ o polinômio de grau n que interpola $f(x)$ nesses pontos. Então é possível mostrar que para cada $x \in (a,b)$, existe um $\zeta\,(x) \in (a,b)$ tal que

$$f(x) - p_n(x) = \left[\sum_{i=0}^{n} (x - x_i)\right] \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta) \quad . \qquad (1)$$

Poderíamos supor que para uma f contínua e suficientemente suave, a sequencia de polinômios interpoladores $\{p_n(x)\}_{n \geq 1}$ convergiria para $f(x)$ conforme aumentássemos o número de pontos de interpolação no intervalo (a,b). No entanto, como o exemplo a seguir, ilustra que isto nem sempre ocorre.

Fenômeno de Runge

A seguinte função, proposta por Carle D. T. Runge ao estudar o comportamento dos erros na interpolação polinomial

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \;,\; x \in [-1, 1] \qquad (2)$$

é tal que a sequencia de polinômios interpoladores $\{p_n(x)\}_{n \geq 1}$construídos a partir de pontos de interpolação igualmente espaçados não converge para $f(x)$ no intervalo de valores $x \in (-1, -0.727) \cup (0.727, 1)$.

Na realidade é possível demonstrar que

$$\lim_{n \to +\infty} \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - p_n(x)| = +\infty \qquad (3)$$

Podemos analisar esse comportamento não regular da interpolação a partir do termo

$$\prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \qquad (4)$$

contido na expressão (1). Esse produtório possui uma flutuação para os valores do argumento próximos à fronteira do intervalo $(-1,\ 1)$ que é progressivamente ampliada conforme aumentamos o número de pontos se os mesmos forem igualmente espaçados. Os gráficos seguintes ajudam a ilustrar o comportamento do produtório (4).

$n := 19 \qquad h := \frac{2}{n} \qquad i := 0..n \qquad x(i) := -1 + i \cdot h$

$f(X) := \prod_i (X - x(i)) \qquad x := -1, -0.99..1$

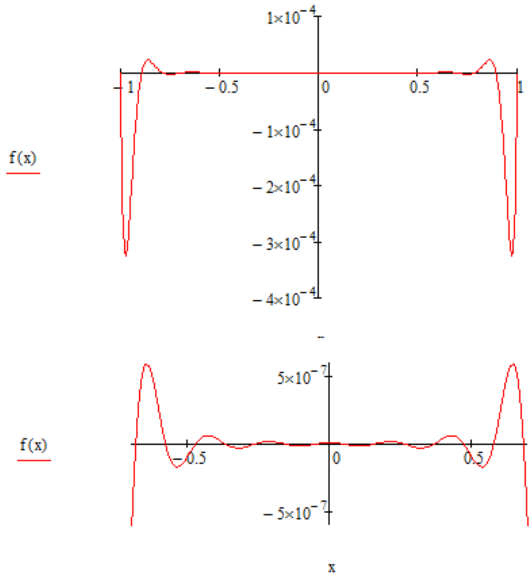


Figura 1. a) comportamento do produtório (4) com 20 pontos igualmente espaçados no intervalo $[-1\,,\ 1]$
b) recorte do mesmo produtório no intervalo $[-0.7,\ 0.7]$

Esse comportamento pode ser minimizado através da escolha de pontos não igualmente espaçados. Na realidade é possível demonstrar que a variação do termo (4) é mínima em valor absoluto quando os pontos x_i estão espaçados em um intervalo $(a,\ b)$ segundo a seguinte expressão

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right) \qquad (5)$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. Esses pontos são denominados *pontos de Chebyshev.*
Utilizando os pontos de Chebyshev no intervalo $[-1, .1]$ podemos controlar o comportamento dos polinômios interpoladores para a função de Runge e garantir a convergência $p_n(x) \to f(x)$ quando $n \to +\infty$.

$n := 20 \qquad h := \frac{2}{n} \qquad i := 1..n$

$$X(i,A,B) := \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot i - 1}{2n} \cdot \pi\right)$$

$a := -1 \qquad b := 1$

$$Xi_{i-1} := X(i,a,b) \qquad f(Xx) := \prod_{i=0}^{n-1} \left(Xx - Xi_i\right) \qquad Xx := -1, -0.99..1$$

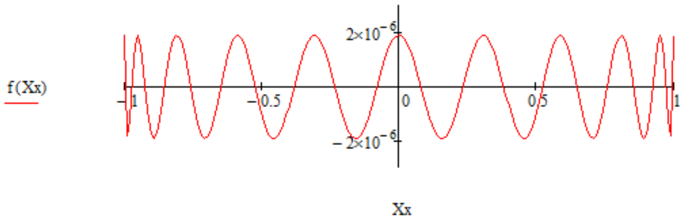
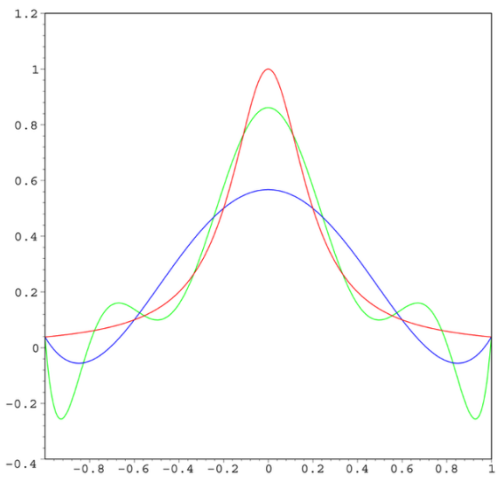


Figura 2. O produtório (4) com 20 pontos de Chebyshev.

Ainda assim, existem funções contínuas que requerem um número impraticável de pontos para que a interpolação se aproxime da função original. Por exemplo, a função $\sqrt{|x|}$ no intervalo $[-1, 1]$ requer um polinômio de grau maior que 10^6 para que a interpolação seja exata até 10^{-3} .em geral, quando utilizamos polinômios de grau maior ou igual a 100 , a maior dificuldade é lidar com os erros de arredondamento.

EXERCÍCIO- Reproduzir o gráfico abaixo usando um programa (script) SCILAB



A curva vermelha é a função Runge. A curva azul é um polinômio interpolador de 5° (com seis pontos igualmente espaçados de interpolação). A curva verde é um polinômio interpolador 9° (com dez pontos igualmente espaçados de interpolação). Nos pontos de interpolação, o erro entre a função e o polinômio de interpolação é (por definição) zero. Entre os pontos de interpolação (especialmente na região perto dos pontos de extremidade 1 e -1), o erro entre a função e o polinômio de interpolação piora por polinômios de ordem superior.