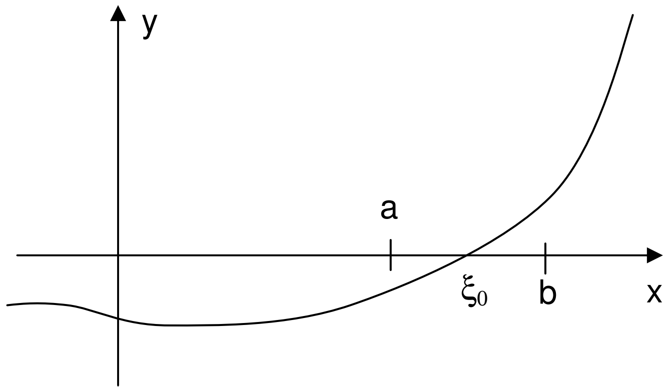
Zero de Funções ou Raízes de Equações

Um número ξ é um zero de uma função f(x) ou raiz da equação se f(ξ)=0.

Graficamente os zeros pertencentes ao conjunto dos reais, IR, são representados pelas abscissas dos pontos onde uma curva intercepta o eixo-x.



Come obter raízes reais de uma função qualquer?

- Achar a raiz de uma função f(x) significa achar um número ξ tal que f(ξ) = 0.
- Algumas funções podem ter suas raízes calculadas analiticamente, porém outras são de difícil solução (funções transcendentais, por exemplo) ou de solução desconhecida (polinômios de ordem maior que 4, por exemplo), sendo necessária a solução por métodos numéricos.
- Fases para a solução numérica
  - Achar um intervalo fechado [a,b] que contenha somente uma solução
  - Refinar a raiz até o grau de exatidão requerido.

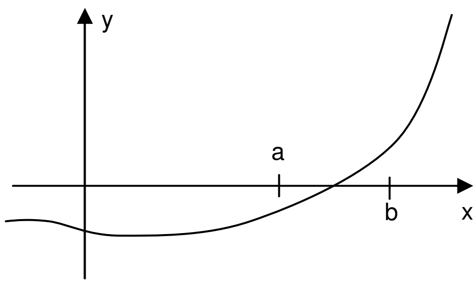
Isolamento da Raiz

Feita através da análise teórica e/ou gráfica da função f(x).

Teorema: Se f(x) é continua em [a, b] e se f(a).f(b) < 0, então existe pelo menos om ponto x = ξ entre a e b que é zero de f(x).

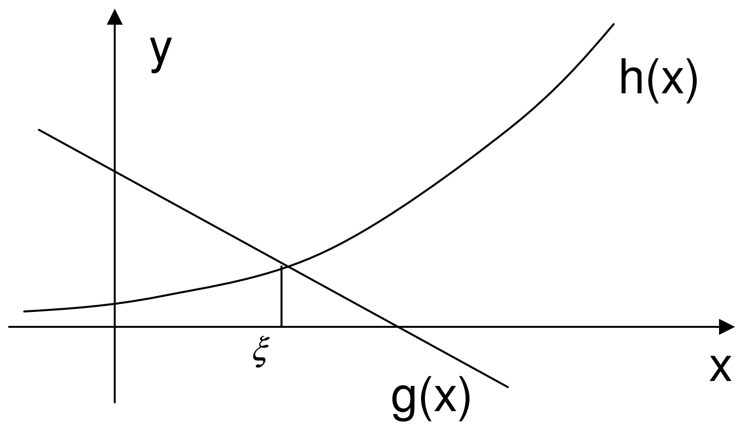
Isolamento de raízes por esboço do gráfico

Dada a função f(x), o ponto f(ξ) = 0 é exatamente o ponto onde a função cruza o eixo x



- Caso a função f(x) seja complexa, podemos tentar escrevê-la na forma
- Supondo f(ξ) = 0 teremos $g(\xi) - h(\xi) = 0 \Rightarrow g(\xi) = h(\xi)$

- Dessa forma, podemos traçar os gráficos das funções g(x) e h(x) e o ponto de interseção destes irá nos fornecer a raiz da função f(x)



Critérios de parada

Existe vários tipo de critérios de parada:

- Analise do valor da função:

$$|f(x)| < \delta$$

- Erro absoluto:

$$|x_i - x_{i-i}| < \delta$$

- Erro relativo:

$$\left|\frac{x_i - x_{i-i}}{x_i}\right| < \delta$$

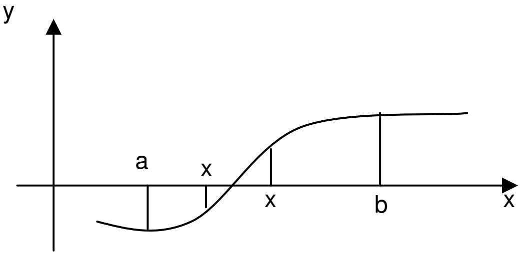
- Limites do intervalo:

$$\frac{b-a}{2} < \delta$$

Método da bisseção

Seja f(x) uma função contínua no intervalo [a, b] e $f(a)\cdot f(b) < 0$, dividindo o intervalo ao meio, obtém-se x_0.
Caso $f(x_0) = 0$, $\xi = x_0$.
Caso contrário,
Se $f(a)\cdot f(x_0) < 0$ então a raiz está no intervalo $[a, x_0]$
Se $f(x_0)\cdot f(b) < 0$ então a raiz está no intervalo $[x_0, b]$
Dividi-se novamente o intervalo obtendo x_1e assim sucessivamente até a precisão desejada.

Graficamente



- Convergência
  - Chamando os intervalos de a_1, b_1, a_2, b_2,... ,a_n, b_n então: $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n+1}}$

Se $|b_n - a_n| \le \varepsilon$

então

$$\left|\frac{b-a}{2^{n+1}}\right| \le \varepsilon$$

Exemplo: Achar a raiz da equação $f(x) = x^3 - 10$ no intervalo [2, 3] com o erro absoluto $\delta < 0.1$

f(2) = -2, f(3) = 17 logo $f(2) \cdot f(3) = -2 \cdot 17 < 0$

$\xi \in [2; 3]$

$x_0 = (2+3)/2 = 2{,}5 \rightarrow f(2{,}5) = 5{,}62$

$\xi \in [2; 2{,}5]$

$x_1 = (2+2{,}5)/2 = 2{,}25 \rightarrow f(2{,}25) = 1{,}39$

Erro= $|x_1 - x_0| = |2{,}25 - 2{,}5| = 0{,}25$

$\xi \in [2; 2{,}25]$

$x_2 = (2+2{,}25)/2 = 2{,}12 \rightarrow f(2{,}15) = -0{,}40$

Erro= $|x_2 - x_1| = |2{,}12 - 2{,}25| = 0{,}13$

$\xi \in [2; 2{,}25]$

$x_3 = (2{,}12+2{,}25)/2 = 2{,}18 \rightarrow f(2{,}18) = 0{,}46$

Erro= $|x_3 - x_2| = |2{,}18 - 2{,}12| = 0{,}06$

Tabela Bisseção

i	x_i	$f(x_i)$	Erro
0	2,5	5,62	-
1	2,25	1,39	0,25
2	2,12	-0,40	0,13
3	2,18	0,46	0,06

Método da Regula Falsi

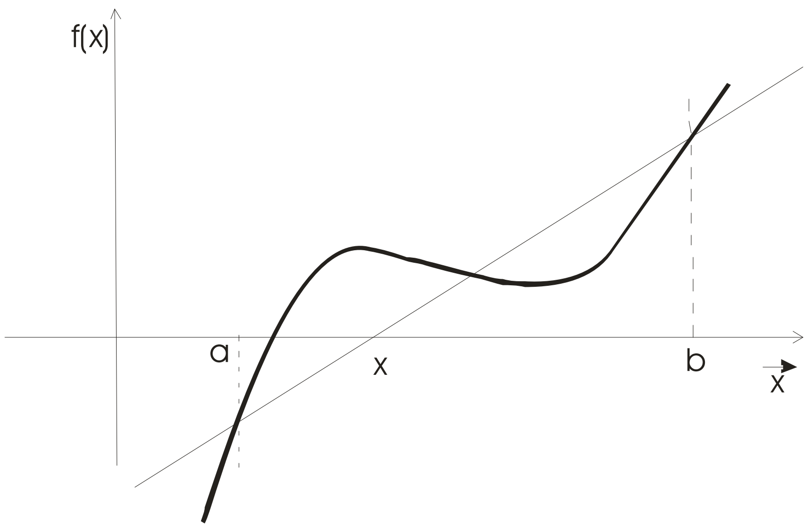
No método da bisseção o valor aproximado da raiz em cada iteração é a média aritmética entre os pontos a e b. O método da Regula Falsi (Posição Falsa) considera a média aritmética ponderada entre os pontos a e b com pesos |f(a)| e |f(b)|, respectivamente.

$$x = \frac{a\left|f(b)\right| + b\left|f(a)\right|}{|f(b)| + |f(a)|}$$

Como f(a) e f(b) têm sinais opostos,

$$x = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Graficamente, o ponto x (aproximação da raiz) é a interseção entre o eixo-x e a reta que passa por (a, f(a)) e (b, f(b))



Exemplo: Achar a raiz da equação $f(x) = x^3 - 10$ no intervalo [2, 3] com o erro absoluto $\delta < 0.1$

f(2) = -2, f(3) = 17

$\xi \in [2; 3]$

$$x_1 = \frac{2 \cdot f(3) - 3 \cdot f(2)}{f(3) - f(2)} = \frac{2 \cdot 17 - 3 \cdot (-2)}{17 - (-2)} = 2{,}11$$

f(2,11) = -0,61

$\xi \in [2{,}11; 3]$

$$x_2 = \frac{2{,}11 \cdot f(3) - 3 \cdot f(2{,}11)}{f(3) - f(2{,}11)} = \frac{2.{,}11 \cdot 17 - 3 \cdot (-0{,}61)}{17 - (-0{,}61)} = 2{,}14$$

f(2.14) = -0,2

Erro= | $x_2 - x_1$| = |2,14 – 2,11 | = 0,03

$\xi \in$ [2,14; 3]

$$x_3 = \frac{2{,}14 \cdot f(3) - 3 \cdot f(2{,}14)}{f(3) - f(2{,}14)} = \frac{2{,}14 \cdot 17 - 3 \cdot (-0{,}2)}{17 - (-0{,}2)} = 2{,}15$$

f(2,15) = -0,06

Erro= | $x_3 - x_2$| = |2,15 – 2,14 | = 0,01

$\xi \in$ [2,15; 3]

$$x_4 = \frac{2{,}15 \cdot f(3) - 3 \cdot f(2{,}15)}{f(3) - f(2{,}15)} = \frac{2{,}15 \cdot 17 - 3 \cdot (-0.06)}{17 - (-0.06)} = 2{,}15$$

Erro= | $x_4 - x_3$| = |2,15 – 2,15 | = 0,00 < 0,01

Tabela Regula Falsi

i	x_i	$f(x_i)$	Erro
1	2,11	-0.61	-
2	2,14	-0,2	0,03
3	2,15	-0,06	0,01
4	2.15	-0.06	< 0,01

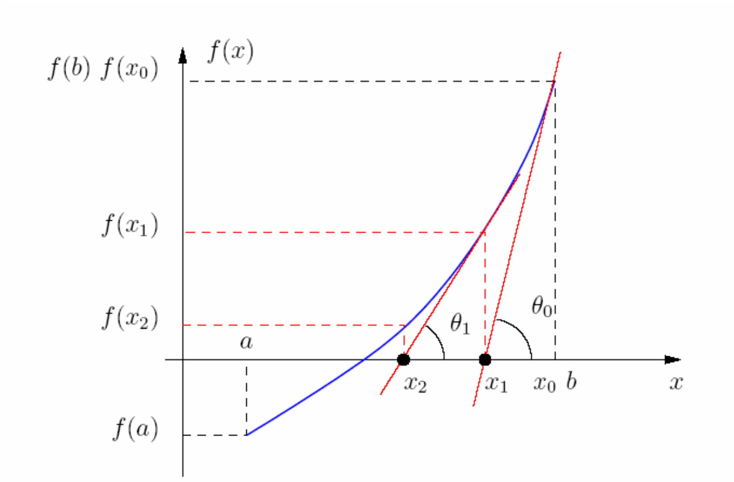
Método de Newton

- Supondo uma aproximação x_0 para a raiz de f(x), no ponto (x_0, $f(x_0)$) passa apenas uma única reta tangente, que é a derivada de f(x) em x_0. Esta reta tangente corta o eixo x na coordenada x_1,definindo por sua vez, o ponto (x_1, $f(x_1)$)
- Por este novo ponto também passa uma única reta tangente que corta o eixo x em x_2. Esta nova coordenada define outro ponto (x_2, $f(x_2)$) que repete todo o processo
- $x_0, x_1, \ldots$ são aproximações cada vez melhores para a raiz da função.

Pela figura temos que $\tan(\theta) = \dfrac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} \Rightarrow x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{\tan(\theta)}$

Já que $f'(x) = \tan(\theta)$ podemos concluir

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$



- Convergência
  - Caso se escolha x_0 de forma que x_1 saia do intervalo [a,b] o método poderá não convergir.
  - Caso $f'(x)$ e $f''(x)$ sejam não nulas e preservem o sinal no intervalo e x_0 seja tal que $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ a convergência é garantida

Exemplo:

Se $\quad f(x) = x^2 + \ln(x)$

Então

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$$

x_0=0,5 (valor inicial próximo a raiz)

Satisfaz também a condição $\quad f(0{,}5) \cdot f''(0{,}5) = -0{,}44 \cdot -3{,}5 = 1{,}54 > 0$

$$x1 = 0{,}5 - \frac{f(0{,}5)}{f'(0{,}5)} = 0{,}5 - \frac{-0{,}44}{3} = 0{,}65$$

$$x2 = 0{,}65 - \frac{f(0{,}65)}{f'(0{,}65)} = 0{,}65$$

Erro= | $x_2 - x_1$| = |0,65 – 0,65 | < 0,01

Tabela Newton

i	x_i	$f(x_i)$	Erro
0	0,5	-0,443	-
1	0,65	-8.283×10^{-3}	0,15
2	0,65	-	< 0,01

Integração Numérica

- Em determinadas situações, integrais são difíceis, ou mesmo impossíveis de se resolver analiticamente.

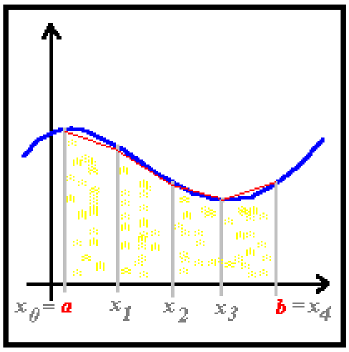
- Exemplo: o valor de f(x) é conhecido apenas em alguns pontos, num intervalo [a, b]. Como não se conhece a expressão analítica de f(x), não é possível calcular

$$\int_a^b f(x)dx$$

- Forma de obtenção de uma aproximação para a integral de f(x) num intervalo [a, b] $\Rightarrow$ Métodos Numéricos.

Regra dos Trapézios

- Intervalo [a, b] de grande amplitude.
- Soma da área de ***n*** trapézios, cada qual definido pelo seu sub-intervalo.



- **Fórmula:**

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)]+\frac{h}{2}[f(x_1)+f(x_2)] + \ldots + \frac{h}{2}[f(x_{N-1})+f(x_N)]$$

- Só os termos ***f(x0)*** e ***f(xn)*** não se repetem, assim, esta fórmula pode ser simplificada em:

$$\int_{x_0}^{x_N} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\{f(x_0)+2[f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{N-1})]+f(x_N)\}$$

Exemplo: Estimar o valor de $\int_0^4 (1+x^2)^{-1/2}dx$

- **Regra dos Trapézios - 2 pontos** (x_0=0.0 e x_1=4.0)
  I=(h/2).(y_0+y_1)=2x(1.00000+0.24254) **= 2.48508**
- **Regra dos Trapézios - 3 pontos** (x_0=0.0,x_1 =2.0,x_2 =4.0)
  I=(h/2).(y_0+2y_1+y_2)=1x(1.00000+2x0.44722+ 0.24254) **= 2.1369**
- **Regra dos Trapézios 9 pontos**
  I=(h/2).(y_0+2y_1+2y_2+2y_3+2y_4+2y_5+2y_6+2y_7+y_8) =**2.0936**

x	$y=(1+x^2)^{-1/2}$
0.0	1.00000
0.5	0.89445
1.0	0.70711
1.5	0.55475
2.0	0.44722
2.5	0.37138
3.0	0.31623
3.5	0.27473
4.0	0.24254

Fórmula de Simpson

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

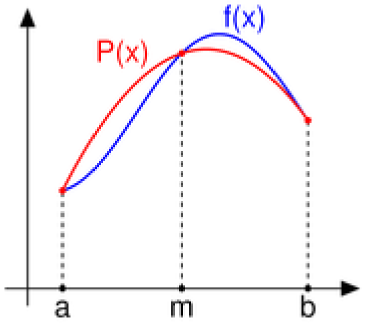
Em Cálculo Numérico, a **Fórmula de Simpson** (em nome de Thomas Simpson, um matemático inglês) é uma forma de se obter uma aproximação da integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Expressão da Fórmula de Simpson

A Fórmula de Simpson faz uma aproximação de *f*(*x*) pelo polinômio quadrático *P*(*x*) que admite o mesmo valor de *f*(*x*) em *a*, *b*, e no ponto central $m = \frac{a+b}{2}$. Pode-se utilizar interpolação por polinômios de Lagrange para encontrar uma expressão para essa função polinomial.

$$P(x) = f(a)\frac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)} + f(m)\frac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)}$$



A função $f(x)$ é aproximada pela função quadrática $P(x)$ (em vermelho).

Segue, através de um cálculo simples, que:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

O erro na aproximação da integral por meio da fórmula de Simpson é dado pela seguinte expressão:

$$-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi),$$

Com $h = (b - a) / 2$ e ξ um número entre a e b.

Fórmula de Simpson

Vemos que a fórmula de Simpson fornece uma boa aproximação se o intervalo de integração $[a,b]$ for pequeno, o que não acontece na maior parte do tempo. A solução óbvia é dividir o intervalo de integração em intervalos menores, aplicar a fórmula de Simpson para cada um destes e somar os resultados. Deste modo obtemos a fórmula de Simpson:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2j-1}) + f(x_n)\right],$$

onde n é o número de partes em que o intervalo $[a,b]$ foi dividido com n par, $h = (b - a) / n$ igual ao comprimento de cada sub-intervalo e $x_i = a + ih$ para $i = 0,1,...,n - 1,n$, em particular, $x_0 = a$ e $x_n = b$. Alternativamente, pode-se reescrever a expressão da seguinte forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].$$

O erro máximo associado à fórmula de Simpson pode ser calculado através de:

$$-\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\xi),$$

Onde *h* é o comprimento do "passo", dado por *h* = (*b* – *a*) / *n*.

Exemplo: Estimar o valor de $\int_0^4 (1+x^2)^{-1/2}\,dx$

- **Regra de Simpson – (2 subintervalos = 3 pontos)** (x_0=0.0,x_1 =2.0,x_2 =4.0)
  I=(h/3).(y_0+4y_1+y_2)=(2/3).(1.00000+4x0.44722+ 0.24254) **= 2.021**

- **Regra de Simpson – (8 subintervalos = 9 pontos)**
  I=(h/3).(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+4y_5+2y_6+4y_7+y_8) = **2.094**

$$\frac{0.5}{3}\cdot(1.0+4\cdot 0.89445+2\cdot 0.70711+4\cdot 0.55475+2\cdot 0.44722+4\cdot 0.37138+2\cdot 0.31623+4\cdot 0.27473+0.24254) = 2.094$$

x	$y=(1+x^2)^{-1/2}$
0.0	1.00000
0.5	0.89445
1.0	0.70711
1.5	0.55475
2.0	0.44722
2.5	0.37138
3.0	0.31623
3.5	0.27473
4.0	0.24254

- **Regra de Simpson – (4 subintervalos = 5 pontos)** (x_0=0.0,x_1 =1.0,x_2 =2.0, x_3 =3.0,x_4 =4.0)
  I=(h/3).(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4) = **2.077**

$$\frac{1}{3}\cdot(1.0+4\cdot 0.70711+2\cdot 0.44722+4\cdot 0.31623+0.24254) = 2.077$$